28. 壬生雅道氏ヨリ吉田耕作氏ヘノ手紙

（名大）

locally bicompact group ノ構造論ヲヤルトキノ例ノ重要ナ *Lemma* ノ証明ガ実ハ無限積空間ヲ考ヘルコトニヨリ非常ニ簡単ニ出来ルコトガ分リマシタ。（*separability* ヲ除イタトキノ直接証明デス）

Lemma G ヲ *locally bicompact*, *connected* + *abel* 群デ *bicompact* デハナイトシマス。$\bar{U}$ ガ *bicompact* デアルヨウナ G ノ *cins* ノ *symmetric* ノ近傍ヲ U トスレバ、U ノ *boundary* $U' = \bar{U} - U$ ノ点 α ニシテ $n\alpha \in U \rightleftarrows n = 0$ ナル $\alpha \in U'$ ガ存在スル。

$\boxed{\text{証 明}}$ $U_1 = U$ トオキマス

一般ニ (1) $U_{n+1} = U_n + U_1$ トシマスト次ノ関係式ノ成立スルコトハ容易ニ分リマス。

(2) $U_r + U_s = U_{r+s}$

(3) $\bar{U}_r + \bar{U}_s = \bar{U}_{r+s}$

次ニ (4) $U'_n = \bar{U}_n - U_n$ （ココノ－ハ集合トシテノ引キ算デス）

トオケバ $U'_n \neq 0$ ナルコトハ明白デス。

更ニ次ノ関係式ガ成立シマス。

(5) $U_r + \bar{U}_s = U_{r+s}$

関係式(3)カラ $C \in U_n$ トスレバ

(6) $C = d_1 + d_2 + \cdots + d_n$ ナル形ニ書キ表スコトガ出来マス。

$d_i \in \overline{U}_i$ $i=1,2,\cdots n$ （実ハ $d_i \in U'_i$ $i=1,2\cdots$）

関係式(5)ガアルタメ $d_i \in U'_i$ $i=1,2\cdots n$ ナルコトガスグ分リマス。

コヽマデハ Pontrjagin ノ本ト全ジコトデスカラ次ニ U'_i 即チ U' ヲ G ノ部分空間ト考ヘレバ bicompact space ニナリマスガ今 U' ノ可附番無限積空間 Ω ヲ考ヘマス。即チ

(7) $\Omega = U' \times U' \times U' \times \cdots$

U' ガ bicompact デスカラ Ω モ bicompact Ω ノ点 x ト云フノハ $x = (a_1, a_2, a_3, \cdots)$ $a_i \in U'$ $i=1,2,\cdots$

今 Ω ノ部分集合デ次ノ如キモノヲ考ヘマス。

$$F_n = \{x = (a_1, a_2, a_3 \cdots);\ a_1 + a_2 + \cdots + a_n \in U'_n\}$$

$F_n \neq 0$ ナルコトハ $U'_n \neq 0$ ト(6)カラ明白デス。F_n ガ閉集合ナルコトモ容易ニ分リマス。関係式(5)ヲ用フレバ(6)ニ於テ $d_1 + d_2 + \cdots + d_{n-1} \in U'_{n-1}$ ナルコトガ分ルノデ

$F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots \supseteq F_n \supseteq \cdots$ トナツテイマス。

$\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i \neq 0$ ニゾクスル一点 $y = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n \cdots)$ ヲトツテキマスト

任意ノ n ニ対シテ $d_1 + d_2 + \cdots + d_n \in U'_n$ ナルコトハ明白デスガ更ニ関係式(5)ヲ用フレバ任意ノ相異ナル自然数ノ系列 $m_1, m_2 \cdots m_r$ ニ対シテ

(8) $d_{m_1} + d_{m_2} + \cdots + d_{m_r} \in U'_r$ ナルコトガ分リマス。

集合 $\{d_1, d_2 \cdots\}$ ニ相等シイモノガ無数ニアレバソノ一ツヲ d トシ然ラザレバ $\{d_1, d_2 \cdots\}$ ノ集合点ノ一ツヲ d トスレバ関係式(8)ヨリ $nd \in U'_n$ ガ容易ニ分リマスカラ $nd \in U \rightleftarrows n=0$ ナルコトガ容易ニ分リ d ハ求ムルモノトナリマス。

Haar measure ノ両側 invariant ナルタメノ條件ニ就テ次ノ結果ヲ得マシタ。以後群ハ凡テ locally bicompact ナル

モノト假定シテオキマス。ナホ Haar measure ト云フノハ小平サンニ從ツテ左ー invariant ナ測度ヲサスモノトシテオキマス。

【定理 1.】 0-dimentional ナ群ノ Haar measure ハ両側 invariant

【定理 2.】 eins ノ component ガ bicompact ナ群ノ Haar measure ハ両側不変.

【定理 3.】 Z ヲ群GノZentrum ニ含マレル任意ノ部分群トシマス；GノHaar measure ガ両側不変ナルタメノ必要充分條件ハ G/Z ノ Haar measure ガ両側不変ナルコトデス。

(前ニ彌永君ガGガリー群デZガzentrum ナルトキ G/Z ガ両側不変ナ Haar measure ヲ持テバGノ Haar measure ガ両側不変ナルコトヲリー群ノ定理ヲ用ヒテ証明シマシタガ、実ハGガリー群デアル必要ハナク、一般ノ群デ成立スルコトガ上ノ定理ノ一部分トシテ含マレテヰルワケデス。更ニ G/Z ノ Haar measure ガ両側不変ナルコトガGノ Haar measure ノ両側不変ナルタメノ必要條件デモアルワケデス)

【定理 4.】 H ヲ群Gノ任意ノ bicompact normal subgroup トシマス。GノHaar 測度ガ両側不変ナルタメノ必要充分條件ハ G/H ノ Haar measure ガ両側不変ナルコトデス。

(系 1) bicompact ナ normal subgroup デ割ツタ群ニ両側不変ナ距離ガ入レバ、モトノ群ノ Haar measure ハ両側不変デス。

(系 2) bicompact ナ normal subgroup デ割ツタ群ガ discrete ナラモトノ群ノ Haar measure ハ両側不変デス。

【定理 5】 D ヲ群Gノ任意ノ discrete ナ normal subgroup トシマス、GノHaar測度ガ両側不変ナルタメノ必要充分條件ハ G/D ノ Haar measure ガ両

側不変ナルコトデス。

（系）群 G ノ *discrete* ナ *normal subgroup* D ガアッテ、G/D ガ *bicompact* ナラ G ノ *Haar measure* ハ両側不変デス

（実ハ定理 3. 4. 5 ヲ一積ニヒックルメテ更ニ比較ヨリ精密ニ次ノ定理ガ成立シマスガ、先ヅ定義カラハジメマス）。

<u>定義 1</u>. 群 G ノ要素 a ガ G ノ任意ノ部分集合 A ニ対シテ aA, ト Aa ノ *Haar measure* ガ等シイトキ、要素 a ノコトヲ、<u>不変要素</u>ト云フコトニシマス。言ヒ変ヘレバ右カラカケテヤッテモ *measure* ガ変ラナイ要素ノコトデス。a ガ不変要素ナラ a^{-1} モ不変要素ナルコトハ容易。

【定理 6】群 G ノ *normal subgroup* N ガアルトシマス。若シ N ガ (1) G ノ *zentrum* ニ含マレルカ。或ヒハ (2) *bicompact* デアルカ、或ヒハ (3) *discrete* デアルカ、

以上イヅレカノ場合ニハ G ノ任意要素 a ガ不変要素デアルタメノ必要充分條件ハ a ヲ G/N ノ要素ト考ヘタトキ a ガ G/N ノ不変要素デアルコトデス。

（系 1） 群 G ノ任意ノ *bicompact* ナ *normal subgroup* ノ *element* ハ凡テ不変要素デス。

（系 2） 群 G ノ任意ノ *discrete* ナ *normal subgroup* ノ *element* ハ凡テ不変要素デス。

（不変要素ニ就テハ定理 6 ノ系 1 ヨリ更ニ精密ナコトガ云ヘマス）

<u>定義 2</u> 群 G ノ要素 a ガアリ集合 $\{a, a^2, a^3, \cdots a^n, \cdots\}$ ガ *totally bounded* ナルトキ要素 a ノコトヲ <u>有界要素</u> ト云フコトニシマス。

a ガ有界要素ナルトキ a^{-1} ガ有界要素ナルコトハスグ云ヘマス。

【定理 7】 群 G ノ要素 a ガ有界要素ナラ a ハ不変要素デス。從ッテ G ノ任意ノ *bicompact subgroup* (*normal* デアル必要ハアリマセン）ノ要素ハ凡テ不変要素デス。

【定理 8】 群 G ノ *normal subgroup* N ガアリ、N ノ

Haar measure（一般ニ両側不変ナラズ）トG/N ノ Haar measure（之モ両側不変トハ限ラナイ）カラ G ノ Haar measure ヲ作ルコトガ出来マス。

大体ノ idear ハ次ノヨウデス。G ノ任意ノ部分集合 A ニ対シテアル方法デ G/N ノ上デ定義サレタ函数 $f_A(x)$ ヲ対応サセ．$f_A(x)$ ヲ G/N ノ Haar measure デ積分シタモノヲ A ノ測度トスルコトニヨリ G ノ Haar measure ガ得ラレマス。集合 A ニ $f_A(x)$ ヲ対応サセルトキニ N ノ Haar measure ヲ用ヒマス。此ノトキ一番ノ難関ハ A ガ如何ナル集合ノトキ $f_A(x)$ ガ可測ニナルカト云フトコロデスガ、幸ヒ A ガ開集合ナルトキ $f_A(x)$ ガ下半連続ナルコトガ証明サレマス。

最後ノ定理（定理ト云フノハオカシイデスガ）8ガ出発点トナツテ他ノ定理1カラ6マデハ互ヒニ関聯シテイマスガ定理ツダケハ之等ト independent デ其ノ証明ハ trivial デス。

定理4ノ系1ノ逆ガ云ヘタラ面白イト思ヒマス。即チ G ノ Haar measure ガ両側不変ナラ適当ナ bicompact normal subgroup N デ G ヲ割レバ G/N ニ両側不変ナ距離ガ入ル。然シコレハドウモアヤシイト思ヒマス。

定理6ハモツト精密ノコトガ云ヘマス。a ヲ G ノ任意ノ要素トシタトキ、G ノ任意ノ部分集合 A ニ対シ $\ell(a)\cdot m^*(A) = m^*(Aa)$（$\ell(a)$ ハ a ニ depend シタ常数）ナル関係ガアリマス。

a ヲ G/N ノ要素ト考ヘタトキ之ヲ a^* ト書クコトニシマスト、実ハ $\ell(a)=\ell(a^*)$ ナルコトガ云ヘマス。

$\ell(a)=1$ ナルコトガ a ガ G ノ不変要素ト云フコトデ
$\ell(a^*)=1$ ナルコトガ a^* ガ G/N ノ不変要素即チ a ヲ G/N ノ要素ト考ヘタトキ不変要素トナルコトデスカラ、$\underline{\ell(a)=\ell(a^*)}$ ナル関係ハ定理6ヨリクワシイト云ヘマス。

群 G ノ normal subgroup N ガアタヘラレテイルトシマス。N ノ任意ノ要素 $a\in N$ ニ対シテ、実数 $\overline{\ell}(a)$ ガ定マリ、$m^*(Aa) = \overline{\ell}(a)\cdot m^*(A)$ ガ成立シマス。但シ A ハ N ノ任意ノ部分集合ニシ

テ m^* ハ N ノ *Haar measure* デス・G ノ *Haar measure* μ^* ニ対シテモ全様ニ実数 $\ell(a)$ ガ定マリ．$\alpha^*(B_a) = \ell(a)\cdot\alpha^*(B)$ ガ G ノ任意ノ部分集合 B ニ対シテ成立シマス，ソウスルト次ノ定理ガ成立シマス。

【定理 9】 任意ノ $a \in N$ ニ対シテ $\ell(a) = \ell(a)$

（系 1） 群 G ノ *Haar measure* ガ両側不変ナラ G ノ任意ノ *normal subgroup* ノ *Haar measure* モ両側不変デス。

（系 2） 群 G ノ要素ニシテ右カラ掛ケテヤッテモ *Haar measure* ガ変ラナイヨウナ要素全体 $H = \{a ; \ell(a) = 1\}$ ハ G ノ *normal subgroup* ニナッテ両側不変ナ *Haar measure* ヲ持ツヨウナモノハ凡テ H ニ含マレテシマヒマス。従ッテ G ノ如何ナル *bicompact* ナ *normal subgroup* モ又如何ナル *discrete* ナ *normal subgroup* H ニ含マレマス，

尚 G ノ *zentrum* 及ビ *commutator* ガ H ニ含マレルコトハ明白デス。

G ノ任意ノ *bicompact subgroup*（必ズシモ *normal* デアル必要ハアリマセン）ガ H ニ含マレルコトハ定理 7 ニ示サレテイマス。

定理 9 ノ系 1 ヲ更ニ精密ニ出来ルカドウカ、例ヘバ G ノ *Haar measure* ガ両側不変ナラ G ノ如何ナル *subgroup* モ両側不変ナ *Haar measure* ヲ有スル ヨウナ事ガ云ヘルカドウカ僕ニハ分リマセン。

又 G ヲ任意ノ *normal subgroup* N デ割ッタ G/N ノ *Haar measure* ガ常ニ両側不変カドウカモ分リマセン。

定理 4 ノ系 1 ノ逆、即チ G ノ *Haar measure* ガ両側不変ナラ適当ナ *bicompact normal subgroup* N デ G ヲ割レバ G/N ニ両側不変ナ距離ガ入ルト云フコトガドウモ云ヘソウナ気モシマス。小平サンノ論文ヲ見テ測度ガアタヘラレタトキ位相ヲ導入スルトコロヲ吟味スレバ測度ノ両側不変性ガアレバ位相ノホウニドウ云フ影響ヲ

アタヘルカガ分ルカモ知レマセン。

（系 3） 任意ノ群Gハ適当ナ *normal subgroup* Nヲ持ツ. テクレバ G/N モNモ共ニ両側不変ナル Haar *measure* ヲ有スルヨウニ出来ル。（実ハ G/N ハ両側不変ナ Haar *measure* ヲ有スルバカリデナク *abel*群ニスルコトガ出来マス）

【定理 10】 群Gノ不変要素全体ノ集合ヲ $H=\{a\,;\,l(a)=1\}$ トシマス，若シ $\overline{\overline{G}}>\aleph_0$ ナラ $\overline{\overline{H}}>\aleph_0$ デス。

【定理 11】 Hヲ定理 10 ニ於ケルHトシマス・若シGガ *connected* ナラ $G=H$カ. サモナケレバ G/H ハ実数ノ群ト *isomorph* デス。 （1947.1.27 段村）